

به نام خدا

فصل سوم متغیر های تصادفی و توابع توزیع

Jalase 1 – sco 1

تعریف متغیر تصادفی

نتایج حاصل از یک آزمایش تصادفی را به صورت های مختلفی می توان بیان نمود . مثلا شیر یا خط را با نمود 1 و -1 نیز نمایش داد . از آنجا که این اعداد در آزمایش به صورت تصادفی ظاهر می شوند ، می توان آنها را با یک متغیر تصادفی مثل X نمایش داد . با استفاده از متغیر تصادفی تفسیر نتایج حاصل از آزمایش های تصادفی ساده تر می شود .

تعریف :

یک متغیر تصادفی ، تابعی است از فضای نمونه به زیر مجموعه ای ناتهی از اعداد حقیقی که آن را با حروف بزرگ مانند X, Y, \dots نمایش می دهیم .
برای نمایش برد یک متغیر تصادفی یا مجموعه مقادیری که متغیر اختیار می کند ، از حروف کوچک مثل x, y, \dots استفاده می کنیم .

مثال 1 :

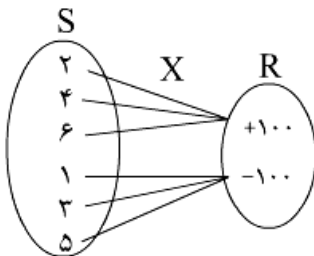
در یک بازی شخصی تاسی را می ریزد ، اگر عدد زوج بیاورد 100 تومان به او می دهیم و اگر عدد فرد بیاورد 100 تومان از او می گیریم . اگر متغیر تصادفی X در آمد شخص در نظر گرفته شود ، مقادیر آن را بدست آورید .

حل :

ابتدا فضای نمونه را بدست می آوریم .

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

همان طور ی می بینید با توجه به نمودار زیر فضای نمونه S تحت تابع X به یک زیر مجموعه از R متشکل از دو عضو $+100$ و -100 برده شده است .



عدد $+100$ را برای دریافت و -100 را برای پرداخت پول در نظر می گیریم .

$$X : S \rightarrow R$$

$$X(2) = 100 \quad X(1) = -100$$

$$X(4) = 100 \quad X(3) = -100$$

$$X(6) = 100 \quad X(5) = -100$$

از آنجا که احتمال هر یک از اعداد 1 تا 6 برابر $\frac{1}{6}$ می باشد داریم :

$$A = \{ 2, 4, 6 \}$$

$$P(X = 100) = P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$B = \{ 1, 3, 5 \}$$

$$P(X = -100) = P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

حال می توانیم میانگین درآمد شخص را پس از تکرار بازی به دفعات محاسبه کنیم

$$\begin{array}{c|cc} X & 100 & -100 \\ \hline P & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \Rightarrow \bar{X} = \frac{100 \times \frac{1}{2} + (-100) \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 0$$

با توجه به $\bar{X} = 0$ می توان نتیجه گرفت که شخص با تکرار بازی پولی به دست نمی آورد .



Jalase 1 – sco 2

انواع متغیر های تصادفی

متغیر های تصادفی عموماً بر 2 دسته می باشند :

1. گسسته : متغیر هایی که برد آن یا مجموعه مقادیری که اختیار می کند ، به صورت از هم جدا و یا شمارش پذیر از اعداد حقیقی باشند .
2. مقادیری اختیار می کند ، که در مجموعه ای پیوسته یا شمارش ناپذیر از اعداد حقیقی قرار دارند .

توجه :

همان طور که در فصل قبل اشاره کردیم احتمال وقوع هر عضو منفرد از مجموعه ای پیوسته برابر صفر می باشد . این مطلب برای متغیر های تصادفی پیوسته نیز برقرار می باشد . یعنی احتمال برابر بودن مقدار یک متغیر تصادفی پیوسته X بت هر عنصر منفرد از فضای برد آن برابر صفر می باشد .

مثال 2 :

در یک جعبه 22 مهره موجود می باشد که هر مهره دارای یکی از شماره های 1 و 2 و 3 و 4 و 5 و 6 می باشد . در ضمن به تعداد عدد نوشته شده بر روی هر مهره از همان مهره درون جعبه موجود می باشد . یک مهره از جعبه خارج می کنیم . اگر متغیر تصادفی X شماره مهره خارج شده باشد ، مطلوبست مقادیر احتمالی که متغیر X به خود می گیرد .

حل :

با توجه به صورت مثال یک مهره با شماره یک خواهیم داشت ، 2 مهره با شماره 2 و به همین ترتیب 6 مهره با شماره 6 داریم . فضای نمونه مقادیری که X اختیار می کند :

$$S_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

در نتیجه تابع احتمال به صورت زیر بدست می آید :

X	۱	۲	۳	۴	۵	۶
$P_X(x)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

مثلا $P(x=6) = \frac{6}{21}$ است .

می توانیم به ازای هر مقدار x احتمال آن را به فرم $P_X(x)$ نشان داد که به آن تابع احتمال متغیر تصادفی x گوئیم .

تعریف : تابع احتمال متغیر تصادفی x ، تابعی است که از یک متغیر حقیقی x که با $P_X(x)$ نمایش داده می شود:

$$P_X(x) = P(X = x)$$

هر تابع احتمال برای متغیر تصادفی گسسته x باید در شرایط زیر صدق کند .

۱) $P_X(x) \geq 0$ ، به ازای هر x

۲) $\sum_{\text{برد } x} P_X(x) = 1$



Jalase 1 – sco 3

توابع توزیع و چگالی برای متغیر تصادفی پیوسته

اگر $P_X(x)$ تابع احتمال متغیر تصادفی گسسته x باشد ، تابع توزیع $F_X(x)$ به صورت زیر تعریف می شود :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad ; \quad F_X(x) = p(X \leq x) = \sum_{t \leq x} P_X(t)$$

مثال 4 :

تابع توزیع را برای متغیر تصادفی که در مثال قبل حل شد را بدست آورید .

حل :

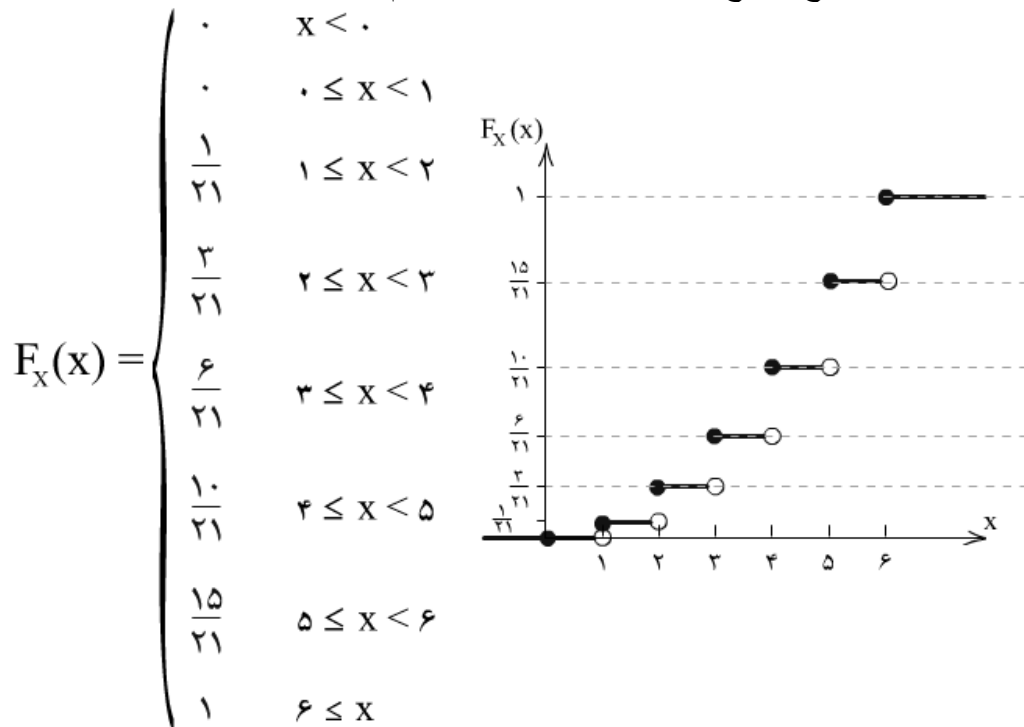
با توجه به جدول احتمالات متغیر تصادفی x داریم :

X	۱	۲	۳	۴	۵	۶
$P_X(x)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

$$F_X(1) = P(X \leq 1) = \frac{1}{21}$$

$$F_X(2/5) = P(X \leq 2/5) = \sum_{t \leq 2/5} P_X(t) = P_X(1) + P_X(2) = \frac{3}{21}$$

به ازای هر $x < 0$ مقدار تابع توزیع برابر صفر می باشد . داریم :



همان طور که مشاهده می شود تعریف تابع توزیع متغیر تصادفی x مشابه تعریف فراوانی تجمعی نسبی تعریف شده در فصل 1 است . مقدار فراوانی تجمعی قبل از 1 برابر 0 از 1 تا نزدیک 2 ،

$$\frac{1}{21} \text{ الی آخر است .}$$



Jalase 2 – sco 1

خواص توابع توزیع

توابع توزیع دارای خواص مشترکی می باشند . که با توجه به تعریف آنها بدست می آید . این خصوصیات در مسائل قبل نیز مشاهده می شوند که عبارتند از :

$$0 \leq F_X(x) \leq 1 \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0 \quad (2)$$

$$F_X(\infty) = 1 \quad \quad \quad F_X(-\infty) = 0$$

(3) توابع توزیع همواره صعودی (غیر اکید) می باشد.

$$\forall a \leq b \quad \rightarrow \quad F_X(a) \leq F_X(b)$$

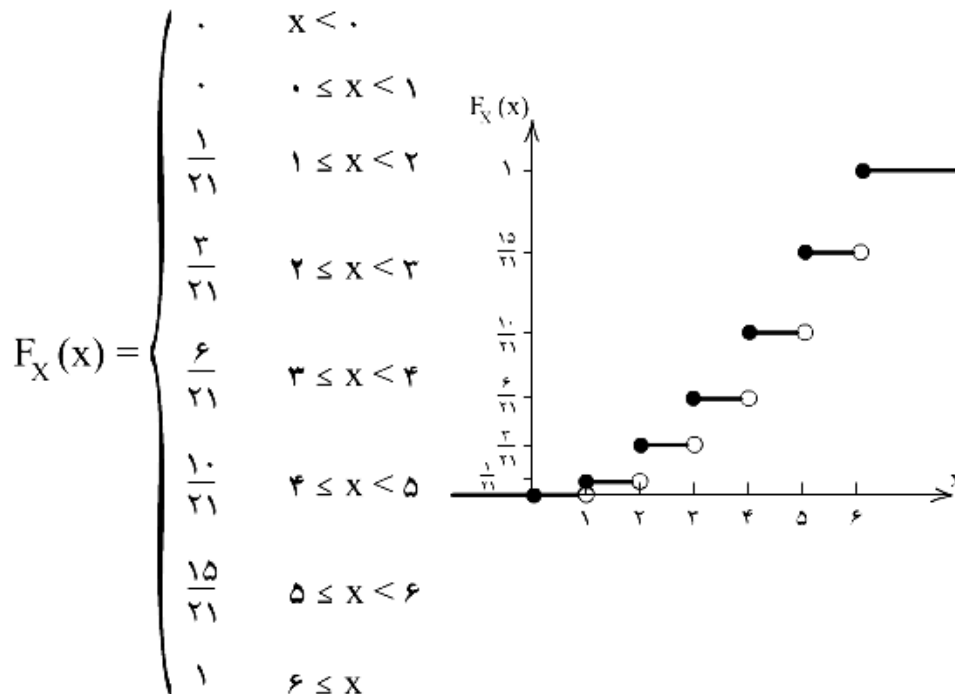
(4) تابع توزیع $F(x)$ در تمام نقاط حداقل از سمت راست، پیوسته می باشد.

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} F_X(x+h) = F_X(x)$$



Jalase 2 – sco 2

همواره از روی یک تابع توزیع متغیر تصادفی می توان مقادیر احتمال را محاسبه نمود.
به عنوان مثال اگر بخواهیم در مثال قبل مقدار $P(x=4)$ را محاسبه کنیم، با توجه به گسسته بودن متغیر تصادفی x داریم:



$$P(X=4) = \lim_{h \rightarrow 0} P(4-h < x \leq 4) \quad 1-3$$

در این صورت $P(x=4)$ را خواهیم داشت. برای محاسبه $P(a < x \leq b)$ به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F_X(b) - F_X(a)$$



توجه: برای سادگی در نوشتن می‌توان اندیس x را از تابع $F_X(x)$ حذف نمود و نوشت $F(x)$. البته اگر به شرطی که بدانیم با متغیر تصادفی x کار می‌کنیم. بنابراین:

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

و داریم:

$$P(X = 4) = \lim_{h \rightarrow 0} P(4 - h < x \leq 4) \quad 1-3$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} [F(4) - F(4 - h)] = F(4) - \lim_{h \rightarrow 0} F(4 - h)$$

که $\lim_{h \rightarrow 0} F(4 - h)$ برابر حد چپ تابع F_X در نقطه 4 می‌باشد و با $F(4^-)$ نمایش می‌دهیم. حال با توجه به ضابطه تابع F_X :

$$F(4^-) = \frac{6}{21}$$

و داریم:

$$P(X = 4) = F(4) - F(4^-) = \frac{10}{21} - \frac{6}{21} = \frac{4}{21}$$

درستی حاصل عبارت بالا از روی تابع احتمال $P_X(x)$ نیز آشکار است.



Jalase 2 – sco 3

در حالت کلی می‌توان رابطه زیر را نوشت:

$$P(X = b) = F(b) - F(b^-)$$

مقدار $P(x = b)$ برابر با میزان جهش نمودار تابع F_X در نقطه b می‌باشد. همچنین تمامی حالات دیگر را با توجه به فرمول بالا و تعریف تابع توزیع می‌توان بدست آورد.

$$۱) P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$$

$$۲) P(a \leq X < b) = P(X < b) - P(X < a) = F(b^-) - F(a^-)$$

$$۳) P(a < X < b) = P(X < b) - P(X \leq a) = F(b^-) - F(a)$$

$$۴) P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X < a) = F(b) - F(a^-)$$

$$۵) P(X > a) = ۱ - P(X \leq a) = ۱ - F(a)$$

$$۶) P(X < a) = F(a^-)$$

حد چپ تابع توزیع در نقطه a



Jalase 2 – sco 4

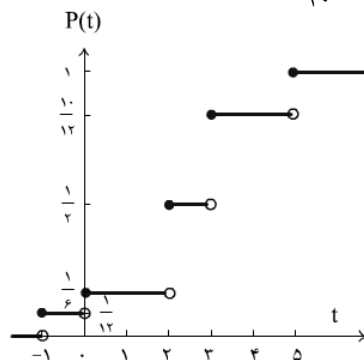
مثال 5 :

تابع توزیع برای متغیر تصادفی گسسته T به صورت زیر است . تابع احتمال آن را بدست بیاورید و نمودار آن را رسم کنید.

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < -1 \\ \frac{1}{12} & -1 \leq t < 0 \\ \frac{1}{6} & 0 \leq t < 2 \\ \frac{1}{2} & 2 \leq t < 3 \\ \frac{10}{12} & 3 \leq t < 5 \\ 1 & 5 \leq t \end{cases}$$

حل:

ابتدا نمودار تابع توزیع را رسم می کنیم .



مقادیری که تابع احتمال $P(T = t)$ می پذیرد، در نقاط انفصال تابع $F(t)$ رخ می دهد. زیرا در نقاط دیگر مثل $T=1$ داریم:

$$P(T = 1) = P(1 \leq T \leq 1) = F(1) - F(1^-) = \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = 0$$

مقدار $P(t)$ را در نقطه انفصال تابع توزیع $F(t)$ به دست می آوریم:

$$P(T = -1) = F(-1) - F(-1^-) = \frac{1}{12} - 0 = \frac{1}{12}$$

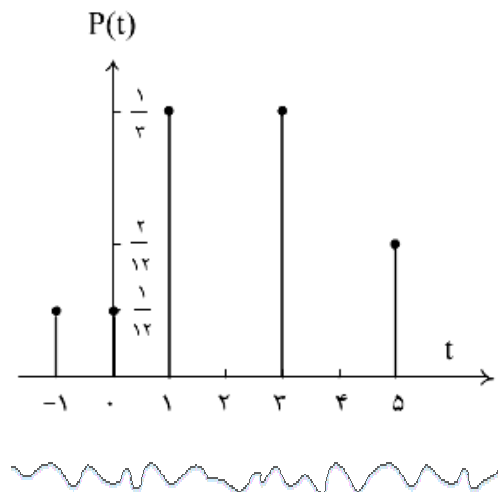
$$P(T = 0) = F(0) - F(0^-) = \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12}$$

$$P(T = 2) = F(2) - F(2^-) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(T = 3) = F(3) - F(3^-) = \frac{10}{12} - \frac{1}{2} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$P(T = 5) = F(5) - F(5^-) = 1 - \frac{10}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

نمودار احتمال $P(t)$ شبیه به نمودار میله ای است.



Jalase 3 – sco 1

توابع چگالی

برای متغیر تصادفی گسسته X تابع چگالی که به فرم $f_X(x)$ نمایش داده می شود به صورت زیر تعریف می شود:

$$f_X(x) = P(X = x) \quad \text{X عدد حقیقی}$$

به عبارت دیگر تابع چگالی همان تابع احتمال متغیر تصادفی گسسته X می باشد که در رابطه زیر صدق کند:

$$F_X(x) = \sum_{X \text{ برد}} f_X(x)$$

در برخی از کتاب ها به جای تابع احتمال برای متغیر های تصادفی گسسته مفهوم تابع چگالی را که دقیقاً همان تعریف را دارد به کار می برند .



Jalase 3 sco 2

توابع توزیع و چگالی برای متغیر تصادفی پیوسته

قبل از هر چیز به مثال زیر توجه کنید :

مثال :

فرض کنید مدت زمان توقف اتوبوس در ایستگاه و قبل از حرکت به صورت تصادفی 0 الی 15 دقیقه باشد . در این صورت متغیر تصادفی X را مدت زمان تأخیر حرکت اتوبوس پس از 5 دقیقه تعریف می کنیم . مطلوب است احتمال لین که اتوبوس به مدت 5 الی 6 دقیقه تأخیر داشته باشد .

حل :

در این مثال با یک فضای نمونه پیوسته مواجه ایم که می توان آن را به صورت زیر نمایش داد :

$$S = \{ 5 \leq x \leq 15 \}$$

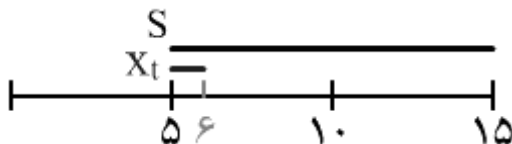
نمایش تابعی متغیر تصادفی X عبارت است از $x_t = t - 5$ و $(t \in S)$ که میزان تأخیر حرکت اتوبوس را نشان می دهد .

به این ترتیب می توان احتمال این که اتوبوس به مدت 5 الی 6 دقیقه تأخیر داشته باشد را محاسبه نمود .

احتمال این که $5 \leq x_t \leq 6$ باشد برابر است با طول بازه ی $[5, 6]$ تقسیم بر طول بازه $[5, 15]$.

$$\frac{[5, 6]}{[5, 15]} = 0.1$$

لازم به تذکر است که در این جا تابع احتمال یک فاصله پیشامد مورد نظر به طول فاصله فضای نمونه ، تعریف شده است .



حال با توجه به این مثال به تعریف تابع چگالی ، تابع توزیع احتمال برای متغیر تصادفی پیوسته می پردازیم .

فرض کنید $x = X$ متغیر تصادفی پیوسته باشد در این حالت نیز تعاریف تابع توزیع و چگالی در مورد متغیر x صدق می کند . با این تفاوت که در این حالت برای بدست آوردن تابع توزیع با توجه به پیوسته بودن از انتگرال گیری به جای جمع بستن روی تابع چگالی استفاده می کنیم . داریم :

$$F_X(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^t f_X(x) dx$$

که $f_X(x)$ تابع چگالی متغیر تصادفی پیوسته X است .
 از این رابطه می توان تابع چگالی را بر حسب تابع توزیع بدست آورد ، به کمک مشتق گیری
 یعنی

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

به عبارتی با مشتق گرفتن از تابع توزیع مقدار چگالی به دست می آید . با توجه به تعاریف می
 توان خواص زیر را توابع توزیع و چگالی متغیر تصادفی پیوسته X بدست آورد.



Jalase 3 – sco 3

1- برای هر $x \in R$ ، داریم $f_X(x) \geq 0$.

توجه کنید که در حالت پیوسته $f_X(x)$ الزاما کوچکتر یا مساوی یک نمی باشد زیرا همان طور
 که قبلا اشاره کردیم مقدار تابع احتمال برای متغیر تصادفی در یک نقطه صفر می باشد و
 احتمالات می بایستی در این حالت در یک بازه محاسبه شوند .
 -2

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1$$

برای محاسبه احتمال قرار گرفتن متغیر تصادفی X در یک بازه به این ترتیب عمل می کنیم :

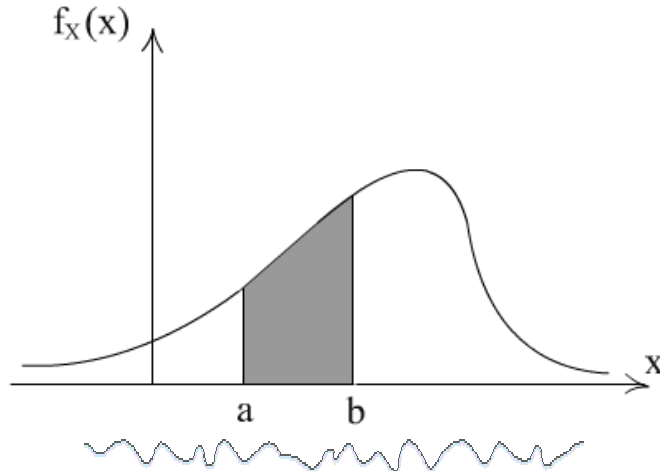
$$\begin{aligned} P(a < X \leq b) &= F(b) - F(a) = \int_{-\infty}^b f_X(x) dx - \int_{-\infty}^a f_X(x) dx \\ &= \int_a^b f_X(x) dx \end{aligned}$$

از طرفی در حالت پیوسته احتمال این که X برابر عدد دیگری باشد صفر می باشد . بنابراین می
 توان نوشت:

$$P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b)$$

$$= \int_a^b f_X(x) dx$$

از لحاظ هندسی احتمال قرار گرفتن متغیر تصادفی پیوسته X در بازه a تا b برابر است با سطح
 زیر منحنی تابع چگالی از a تا b . مطابق شکل زیر :



Jalase 4 – sco 1

مثال :

تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی پیوسته x به صورت زیر می باشد :

$$f_X(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ c - x & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

الف) مقدار متغیر c را بدست آورید .

ب) تابع توزیع متغیر تصادفی x را بدست آورید .

ج) احتمال $P\left(\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}\right)$ را یکبار با استفاده از تابع چگالی $f_X(x)$ و یکبار با استفاده از تابع

توزیع $F_X(x)$ در نقطه x محاسبه کنید .

حل :

الف) برای بدست آوردن متغیر c می دانیم مساحت زیر منحنی f_X یعنی تابع چگالی می بایستی

برابر واحد باشد . بنابراین :

$$\int_x f_X(x) dx = 1 \Rightarrow \int_0^2 f_X(x) dx = \int_0^1 x dx + \int_1^2 (c - x) dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 + \left(cx - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{2} + (2c - 2) - c + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} + 2c - 2 - c + \frac{1}{2} = c - 1$$

$$\Rightarrow c - 1 = 1 \Rightarrow c = 2$$

Jalase 4 – sco 2

ب) مقدار تابع توزیع f_X را محاسبه می‌کنیم. می‌دانیم:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$

برای حل می‌بایستی این مقدار را در چهار حالت $x < 0$ و $0 \leq x < 1$ و $1 \leq x < 2$ و $x \geq 2$.

$$\text{اگر } x < 0 \Rightarrow F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = 0$$

$$\begin{aligned} \text{اگر } 0 \leq x < 1 \Rightarrow F_X(x) &= \int_{-\infty}^x f_X(t) dt + \int_0^x t dt \\ &= 0 + \left. \frac{t^2}{2} \right|_0^x = \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{اگر } 1 \leq x < 2 \Rightarrow F_X(x) &= \int_{-\infty}^1 f_X(t) dt + \int_1^x f_X(t) dt + \int_x^x f_X(t) dt \\ &= 0 + \int_0^1 t dt + \int_1^x (2-t) dt = \\ &= 0 + \left. \frac{t^2}{2} \right|_0^1 + \left. \left(2t - \frac{t^2}{2} \right) \right|_1^x \\ &= 0 + \frac{1}{2} + \left(2x - \frac{x^2}{2} \right) - \left(2 - \frac{1}{2} \right) = \\ &= 0 + \frac{1}{2} + 2x - \frac{x^2}{2} - 2 + \frac{1}{2} = 2x - \frac{x^2}{2} - 1 \end{aligned}$$

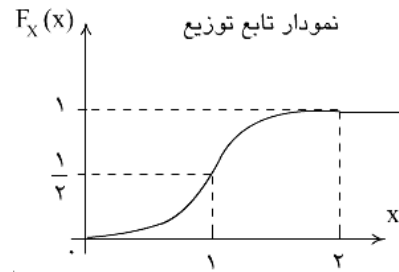
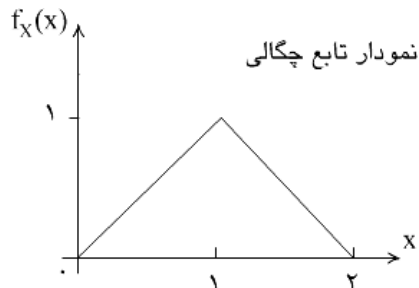
$$\begin{aligned} \text{اگر } 2 \leq x \Rightarrow F_X(x) &= \int_{-\infty}^1 f_X(t) dt + \int_1^2 f_X(t) dt + \int_2^x f_X(t) dt + \int_x^x f_X(t) dt = \\ \Rightarrow F_X(x) &= 0 + \int_0^1 t dt + \int_1^2 (2-t) dt + \int_2^x f_X(t) dt \\ &= 0 + \left. \frac{t^2}{2} \right|_0^1 + \left. \left(2t - \frac{t^2}{2} \right) \right|_1^2 + 0 \\ &= \frac{1}{2} + (2 - 2) - \left(2 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

بنابراین ضابطه تابع توزیع $F_X(x)$ برابر است با :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x^2}{2} & 0 \leq x < 1 \\ 2x - \frac{x^2}{2} - 1 & 1 \leq x < 2 \\ 1 & 2 \leq x \end{cases}$$

حال به نمودار دو تابع چگالی و توزیع توجه کنید :

نمودار تابع چگالی به صورت یک مثلث که قاعده پایینی آن بر روی محور x ها حدفاصل 0 تا 2 است ، می باشد .



Jalase 4 – sco 3

ج (ابتدا مقدار $P(\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2})$ را با استفاده از تابع چگالی $f_X(x)$ بدست می آوریم .

$$P(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{2}) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f_X(t) dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 t dt + \int_1^{\frac{3}{2}} (2-t) dt$$

و این به خاطر این است که ضابطه تعریف تابع چگالی از 1 تا $\frac{3}{2}$ با $\frac{1}{2}$ تا 1 متفاوت است .

$$= \frac{t^2}{2} \Big|_{\frac{1}{2}}^1 + (2t - \frac{t^2}{2}) \Big|_1^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + (3 - \frac{9}{8}) - (2 - \frac{1}{2})$$

$$= 2 - \frac{10}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 0.75$$

مجدادا مقدار $P(\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2})$ را با استفاده از تابع توزیع $F_X(x)$ که در بند ب محاسبه شده است بدست می آوریم.

$$P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{2}\right) = F_X\left(\frac{3}{2}\right) - F_X\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= 3 - \frac{9}{8} - 1 - \frac{1}{8} = 2 - \frac{10}{8} = \frac{3}{4} \quad \text{تابع توزیع}$$

ملاحظه می کنید که مقدار احتمال از هر دو راه حل برابر است:

$$= 2 - \frac{10}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 0.75 \quad \text{تابع چگالی}$$

Jalase4 - sco 4

مثال:

متغیر تصادفی پیوسته x دارای تابع توزیع $F_X(x)$ با ضابطه زیر می باشد:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ c - e^{-ax} & x \geq 0 \end{cases}, \quad a > 0$$

الف) مقدار متغیر c را بدست آورید؟

ب) تعیین کنید متغیر a چه مفادیری می تواند بگیرد، به شرطی که $F_X(x)$ همچنان تابع توزیع باقی بماند.

ج) تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی x را بدست بیاورید.

د) مقادیر احتمال $P(x \leq 1)$ و $P(0 \leq x \leq 2)$ و $P(x \geq \ln 10)$ را بدست آورید.

ه) به ازای چه مقداری از متغیر y مقدار $P(x \leq y) = \frac{1}{2}$ می باشد؟

حل:

می دانیم شرط این که تابعی مثل $F_X(x)$ تابع توزیع باشد برابر است با:

$$1 - 0 \leq F_X(x) \leq 1 \quad \forall x$$

$$2 - \lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$$

$$3 - F_X(a) \leq F_X(b) \quad \forall a \leq b$$

$$4 - \lim_{h \rightarrow 0} F_X(x+h) = F_X(x) \quad \forall x$$

پس از آن باقی شروط را بررسی می کنیم.

$$1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} c - e^{-ax} = c - \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-ax} = c \rightarrow c = 1$$

اگر $x < 0$ آنگاه $F_X(x) = 0$ می باشد، که در نتیجه شرط برقرار است.

اگر $x \geq 0$ آنگاه $F_X(x) = 1 - e^{-ax}$ داریم:

$$x \geq 0 \Rightarrow 0 \leq e^{-ax} \leq 1 \rightarrow -1 \leq e^{-ax} < 0 \rightarrow 1 - 1 \leq e^{-ax} < 1$$
 اگر

$$\rightarrow 0 \leq 1 - e^{-ax} < 1 \rightarrow 0 \leq F_X(x) \leq 1$$

$$\forall x \leq y \Rightarrow e^{-ax} \geq e^{-ay} \rightarrow -e^{-ax} \leq -e^{-ay}$$

$$\Rightarrow 1 - e^{-ax} \leq 1 - e^{-ay} \rightarrow F_X(x) \leq F_X(y)$$



Jalase 4 – sco 5

همچنین به ازای هر $x \geq 0$ تابع e^{-ax} پیوسته می باشد. بنابراین تابع $1 - e^{-ax}$ نیز حداقل از سمت راست پیوستگی دارد و در نقطه $x=0$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - e^{-ax} = F_X(0) = 0$$

بنابراین تابع در نقطه 0 پیوسته می باشد. با توجه به برقراری هر 4 شرط می توانیم بگوییم $F_X(x)$ با ضابطه زیر یک تابع توزیع احتمال می باشد.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-ax} & x \geq 0 \end{cases}$$

ب) از آنجایی که تابع $F_X(x)$ مستقل از مقدار a در شرایط تابع توزیع صدق می کند، بنابراین به ازای همه مقادیر $a > 0$ تابع $F_X(x)$ نیز تابع توزیع می باشد.

ج) برای بدست آوردن تابع چگالی $f_X(x)$ کافی است از تابع توزیع مشتق بگیریم به این ترتیب که:

$$\text{اگر } x < 0 \quad F'_X(x) = 0$$

$$\text{اگر } x \geq 0 \quad F'_X(x) = 0 - (-a)e^{-ax} = ae^{-ax}$$

توجه کنید که تابع توزیع در نقطه $x=0$ پیوسته می باشد. اما تابع در این نقطه مشتق ندارد زیرا مشتق چپ و راست در $x=0$ با هم برابر نمی باشند.

$$\text{مشتق چپ در صفر} \Rightarrow x < 0 \rightarrow F'_X(0) = 0$$

$$\text{مشتق راست در صفر} \Rightarrow x \geq 0 \rightarrow F'_X(0) = ae^{-a(0)} = a$$

بنابراین تابع چگالی احتمال برابر است با :

$$f_X(x) = \begin{cases} ae^{-ax} & x > 0 \\ 0 & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

Jalase 4 – sco 6

(د)

$$P(x \leq 1) = F_X(1) = \int_{-\infty}^1 f_X(x) dx = 1 - e^{-a}$$

$$P(0 \leq x \leq 2) = F_X(2) - F_X(0) = 1 - e^{-2a} - (1 - 1) = 1 - e^{-2a}$$

$$\begin{aligned} P(x \geq \text{Ln}10) &= 1 - P(x < \text{Ln}10) = 1 - F_X(\text{Ln}10) = \\ &= 1 - 1 + e^{-a \text{Ln}10} = e^{-a \text{Ln}10} = 10^{-a} = \frac{1}{10^a} \end{aligned}$$

(ه) به فرم زیر عمل می کنیم :

$$\begin{aligned} P(X \leq y) &= \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - e^{-ay} = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \frac{1}{2} &= e^{-ay} \rightarrow \text{Ln} \frac{1}{2} = -ay \rightarrow y = \frac{-1}{a} \text{Ln} \frac{1}{2} \end{aligned}$$